[수열]

[1] 등차 수열

1. **등차 수열** : 일정한 수(공차)를 더하여 얻어진 수열

例) 1, 3, 5, 7, 9, …

2 2 2 2

2. 등차수열의 일반항

$$a_n = a + (n-1)d \qquad \text{(첫째항 } a\text{, 공차 } d\text{)}$$

3. 등차중항 : $b = \dfrac{a+c}{2}$ ← 산술평균

4. 등차수열의 합(S_n)

① 첫째항(a) 와 공차(d)를 알 때 ⇒ $S_n = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

② 첫째항(a) 와 끝항(l)을 알 때 ⇒ $S_n = \dfrac{n(a+l)}{2}$

5. 요령

① 3 개의 수가 등차수열을 이루고 있을 때 : $a-d$, a, $a+d$

② 4 개의 수가 등차수열을 이루고 있을 때 : $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$

③ 5 개의 수가 등차수열을 이루고 있을 때 : $a-2d$, $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$

6. 합과 일반항의 관계

$a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$ $d = a_n - a_{n-1}$

7. **조화 수열** : 역수들이 등차수열을 이룰 때

-. 조화중항 : 수열 a, b, c 가 이 순서로 조화수열 --> $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{c}$ 가 등차수열을 이룸

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \qquad \therefore\ b = \frac{2ac}{a+c}$$

[2] 등비수열과 원리합계

1. 등비 수열 : 일정한 수(공비)를 곱하여 얻어지는 수열

例) 1, 3, 9, 27, ⋯

$$1 \underbrace{\,,\;}_{3} 3 \underbrace{\,,\;}_{3} 9 \underbrace{\,,\;}_{3} 27,\ \cdots$$

2. 등비수열의 일반항

$$\boxed{a_n = ar^{n-1} \qquad \text{(첫째항 } a\text{, 공비 } r\text{)}}$$

3. 등비중항 : $b = \pm\sqrt{ab}$ ← 기하평균

4. 등비수열의 합(S_n)

① $r \neq 1 \quad \Rightarrow \quad S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$
② $r = 1 \quad \Rightarrow \quad S_n = na$

5. 등차, 등비, 조화중항의 대소

두 양수 a, b 에 대하여 등차중항을 A, 등비중항을 G, 조화중항을 H 라 하면,

$$A = \frac{a+b}{2}, \quad G = \sqrt{ab}, \quad H = \frac{2ab}{a+b}$$

① $G^2 = AH$

② $A \geq G \geq H$ (등호는 $a = b$ 일 때 성립)

6. 원리합계

例) 연이율 r, 매년마다 복리로 매 년초에 a 원씩 적립하면 n 년말의 적립총액은 ?

$$S = a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \cdots + a(1+r)^n$$

⇒ 공비 : $1+r$, 첫째항 : $a(1+r)$ 인 등비수열의 합

$$\Rightarrow \quad S = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{(1+r)-1} = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$$

[3] 여러 가지 수열

1. **합의 기호** $\sum$: 수열의 합을 간단히 나타내는 기호

좌변의 끝항의 번호

↑

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$ → 좌변의 k 항 (일반항)

↓

좌변이 첫째항의 번호

2. $\sum$ **의 기본성질** : ① $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$ (복부호동순)

② $\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$ (c는 상수)

③ $\sum_{k=1}^{n} c = c \cdot n$ (c는 상수)

3. **자연수의 거듭제곱의 합** :

① $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

4. **계차수열** : 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n=1, 2, \cdots)$을 **계차**라 하고, 수열 $\{b_n\}$ 을 **계차수열** 이라고 한다.

$\{a_n\}$: a_1, a_2, a_3, a_4, $\cdots$, a_n, a_{n+1}

:

$\{b_n\}$: b_1, b_2, b_3, ……… , b_n

$$\boxed{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2)}$$

5. **군수열** : 어떤 규칙에 의해 몇 개의 군으로 나누어 생각한 수열

例) $1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{2}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \cdots$

6. **멱급수** : 등차수열과 등비수열의 곱으로 이루어진 수열의 합

$$
\begin{array}{rl}
 & S_n = 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots + nr^{n-1} \quad (r \neq 1) \\
-) & rS_n = \quad r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^3 + \cdots + nr^n \\
\hline
 & S_n - rS_n = (1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) - nr^n
\end{array}
$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{1 - r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}$$

7. **부분분수의 합** :

$$\frac{1}{A \cdot B} = \frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)$$ 이용

例) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right)$

[4] 점화식과 수학적 귀납법

1. 수학적 귀납법 : 명제 $P(n)$ 이 다음 두 조건을 만족시킬 때

   ⅰ) $n=1$ 일 때, $P(n)$ 이 성립한다.

   ⅱ) $n=k$ 일 때, $P(n)$ 이 성립한다고 가정하면

   ⅲ) $n=k+1$ 일 때도 $P(n)$ 이 성립한다

   그러면, 명제 $P(n)$ 은 모든 자연수에 대해서도 성립한다.

2. 수열의 귀납적 정의 (점화식)

▨ 유형별 정리

① $a_{n+1}-a_n=d$ (일정) ⇒ 공차가 d 인 등차수열

② $a_{n+1}\div a_n=r$ (일정) ⇒ 공비가 r 인 등비수열

③ $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ ⇒ $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ ⇒ 등차수열

④ $a_{n+1}{}^2=a_n\cdot a_{n+2}$ ⇒ $a_{n+2}\div a_{n+1}=a_{n+1}\div a_n$ ⇒ 등비수열

⑤ $\dfrac{2}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+2}}$ ⇒ $\dfrac{1}{a_{n+2}}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$ ⇒ 조화수열

例) $a_1=1$, $3a_n\cdot a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ 일 때, a_n 은 ?

⑥ $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 의 꼴 ⇒ n 에 1, 2, 3, …, n-1 을 대입하여 얻은 식을 변변 더한다.

$$\Rightarrow\ a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\quad (n\geq 2)$$

例) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+n$ 일 때, a_{10} 은 ?

⑦ $a_{n+1}=f(n)\cdot a_n$ 의 꼴 ⇒ n 에 1, 2, 3, …, $n-1$ 을 대입하여 얻은 식을 변변 곱한다.

⇒ $a_n=a_1\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdots f(n-1)$

例) $a_1=3$, $a_{n+1}=3^{n+1}\cdot a_n$ 일 때, a_n 은 ?

⑧ $a_{n+1}=pa_n+q$ 의 꼴 (단, p, q, α 는 상수)

⇒ $a_{n+1}-\alpha=p(a_{n+}-\alpha)$ 의 꼴로 변형

例) $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+1$ 일 때, a_n 은 ?

⑨ $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ 의 꼴 (단, $p+q+r=0$, p, q, r, k 는 상수)

⇒ $a_{n+2}-a_{n+1}=k(a_{n+1}-a_n)$ 의 꼴로 변형

例) $a_1=1$, $a_2=3$, $a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 일 때, a_n 은 ?

⑩ $a_{n+1}=\dfrac{ra_n}{pa_n+q}$ 의 꼴 ⇒ 양변에 역수를 취한다.

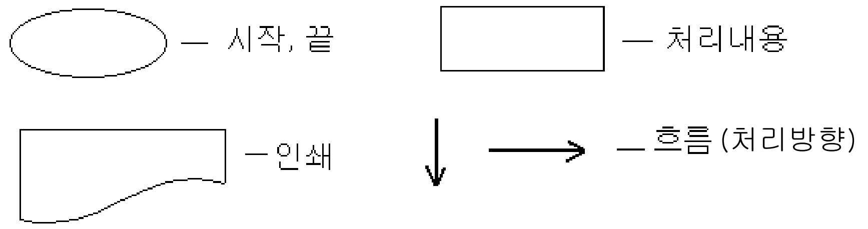
⑪ $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 의 꼴 ⇒ 양변을 p^{n+1} 으로 나눈다.

[5] 알고리즘과 순서도

1. 개념 :

알고리즘(*Algorithm*) : 단계적으로 일을 처리하는 순서.
순서도(*Flow Chart*) : 기호를 써서 그림으로 나타낸 것.

2. 사용되는 기호 :



예1) 다음 값을 구하는 순서도를 작성하여라.

$$1+2+3+\cdots+100$$

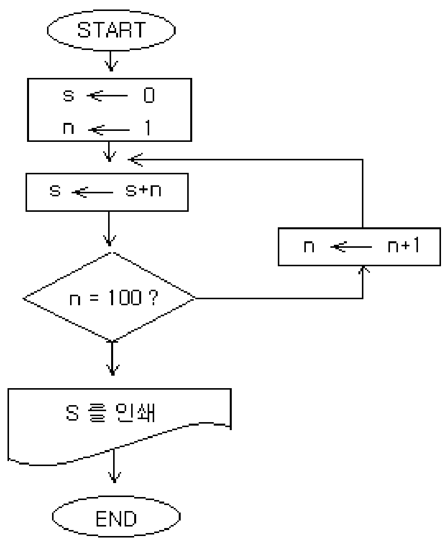
(알고리즘)

i) $S=0$, $n=1$

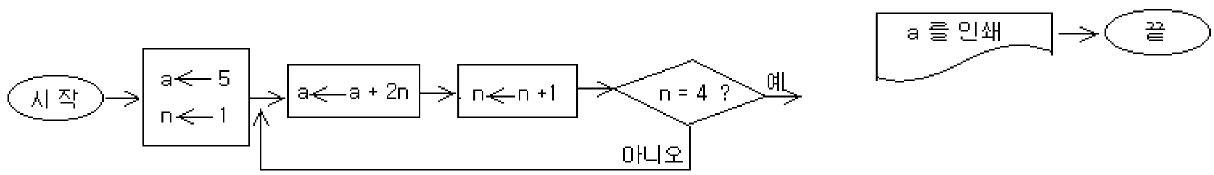
ii) $S=S+n$

iii) $n=100$ 아니면 $n=n+1$ → ii)
성립하면 iv)

iv) S 인쇄



예2) 수열 { a_n } 에서 $a_1=5$, $a_{n+1}=a_n+2n$ $(n\geq1)$ 일 때, a_4 를 구하는 순서도.



수열 문제

1) 첫째항이 6 , 제 4 항이 $\frac{3}{2}$ 인 조화수열의 제 n항은 ?

2) 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_5+a_{15}=10$ 일 때, $a_3+a_7+a_{10}+a_{13}+a_{17}$ 의 값은?

3) 네 수 $a, x, b, 2x$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은? ($x\neq0$)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 2

4) 어떤 등차수열에서 처음부터 10항 까지의 합이 145, 그 다음의 10항 까지의 합이 445이다.
이 때, 그 다음의 10항 까지의 합을 구하여라.

5) 첫째항부터 제 n항 까지의 합을 S_n 이라 할 때, $\log_{10}(S_n+1)=n$ 이 되는 수열의 일반항 a_n을 구하여라.

6) a , b 가 서로 다른 양수라고 한다.
a, x, b 는 등차수열을 이루며, a, y, b 는 등비수열을 이룰 때, x, y 의 대소관계는?

① $x>y$ ② $x\geq y$ ③ $x<y$ ④ $x\leq y$ ⑤ 알 수 없다

7) 공비가 2, 끝항이 400, 총합이 750 인 등비수열에서 첫째 항과 항수를 구하여라.

8) b 가 a , c 의 등비중항일 때, 다음중 $\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_c x}$ 과 같은 것은? (단, a, b, c, x 는 1 이 아닌 양수)

① $\log_b x$ ② $2\log_b x$ ③ $\frac{2}{\log_b x}$ ④ $\frac{1}{\log_b x}$ ⑤ $\log_a x$

9) 연이율 6 %. 매년마다의 복리로 매년 초에 20,000 원씩 적립하면, 10년 후의 원리합계는 얼마인가?

(단, $1.06^{10} \fallingdotseq 1.7908$)

10) $\sum_{k=5}^{n+5} 4(k-3)=An^2+Bn+C$ 일 때, ABC 의 값은?

11) 수열 $2 \cdot 2+4 \cdot 8+6 \cdot 18+8 \cdot 32+\cdots$ 의 제 n 항까지의 합을 구하여라.

12) $S_n=7+77+777+\cdots\cdots+77\cdots7$ 을 구하여라. ($77\cdots7$ 은 7이 n개 있는 수임)

13) 다음 수열의 제 n 항까지의 합을 구하여라.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}\cdots$$

14) 수열 1, 3, 7, 15, 31, …… 의 일반항 a_n 을 구하여라.

15) 다음과 같은 군 수열에서 제 n군의 합을 구하여라.

(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), ……

16) 자연수 n 이 n 개씩 연속되는 수열 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, …… 에 대하여 제 100 항은?

17) 수열$\{a_n\}$이 $a_1=3$, $a_{n+1}=a_n+2n+3$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ 으로 정의 될 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은?

18) $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ 으로 주어지는 수열$\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구하여라.

19) 수열$\{a_n\}$을 $a_1=1$, $2a_{n+1}-a_n+2=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ 과 같이 정의 할 때, 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 을 구하시오.

20) 수열 a_1, a_2, a_3, …… 가 $a_2=3a_1$, $a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ 을 만족시킬 때, $a_8=85$ 이면 a_4 의 값은?

21) 수열$\{a_n\}$을 $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{1-3a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ 으로 정의 할 때, a_{20} 을 구하여라.

22) 다음 등차수열의 합을 구하여라.

$$20+20\frac{1}{5}+20\frac{2}{5}+20\frac{3}{5}+\cdots+40$$

23) 첫째 항이 m, 공차가 1 인 등차수열의 첫째 항부터 제 n 항까지의 합이 50 일 때, $m+n$ 값은?

(m은 $m\leq 10$ 인 자연수)

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

24) 수열 1, -2, 3, -4, 5, ⋯, $(-1)^{n+1}n$, ⋯ 에서 첫째 항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_{100}+S_{29}$ 의 값은?

① -35 ② -65 ③ 35 ④ 65 ⑤ 129

25) 각 자연수 n 에 대하여 x 에 관한 이차방정식 $x^2+2nx+1=0$ 의 두 근을 α_n, β_n 으로 놓을 때, $\sum_{n=1}^{5}(\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2)$ 의 값을 구하면?

① 170 ② 180 ③ 190 ④ 200 ⑤ 210

26) $\sum_{n=1}^{101} ni^n$ 을 계산하면? (단, $i^2=-1$)

27) $S=1+2\frac{1}{2}+3(\frac{1}{2})^2+\cdots+30(\frac{1}{2})^{29}$ 일 때, S 의 값은?

28) $a_1=1,\ na_{n+1}-(n+1)a_n=1\ (n\geq 1)$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은?

① 60 ② 70 ③ 80 ④ 90 ⑤ 100

29) $\sum_{m=1}^{n}\{\sum_{l=1}^{m}(\sum_{k=1}^{l}6)\}$을 n 을 사용하여 나타내시오.

30) 두 수열 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 이 $x_1=1,\ y_1=2$ 이고, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ 을 만족 시킬 때, $\sum_{k=1}^{20}(x_k+y_k)$ 의 값을 구하여라.

수열 문제 풀이

1) 첫째 항 $\frac{1}{6}$, 제 4 항 $\frac{2}{3}$ 인 등차수열의 공차를 d 라 하면,

$\frac{1}{6}+3d=\frac{2}{3}$ $\therefore$ $d=\frac{1}{6}$ $\therefore$ $a_n=\frac{1}{6}+(n-1)\cdot\frac{1}{6}=\frac{n}{6}$ $\therefore$ 제 n 항은 $\frac{6}{n}$

2) 첫째 항을 a , 공차를 d 라 하면, $a_5+a_{15}=(a+4d)+(a+14d)=10$ $\therefore a+9d=5$

$a_3+a_7+a_{10}+a_{13}+a_{17}=(a+2d)+(a+6d)+(a+9d)+(a+12d)+(a+16d)=5(a+9d)=5\times5=25$

3) ②

공차를 d 라 하고, $x=a+d$, $b=a+2d$, $2x=a+3d$

$x=2x-x=(a+3d)-(a+d)=2d$ $\therefore d=\frac{1}{2}x$ $\therefore a=x-d=x-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x$

$b=a+2\cdot\frac{1}{2}x=a+x=\frac{1}{2}x+x=\frac{3}{2}x$ $\therefore \frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{3}{2}x}=\frac{1}{3}$

4) $S_{10}=\frac{10(2a+9d)}{2}=145$, $2a+9d=29$ $\cdots$① $S_{20}-S_{10}=\frac{20(2a+19d)}{2}-145=445$,

$2a+19d=59$ $\cdots$② ②$-$① , $a=1$, $d=3$

$\therefore S_{30}-S_{20}=\frac{30(2+29\times3)}{2}-590=1335-590=745$

5) $\log_{10}(S_n+1)=n$, $S_n+1=10^n$, $S_n=10^n-1$

$a_n=S_n-S_{n-1}=10^n-10^{n-1}=(10^n-1)-(10^{n-1}-1)=9\cdot10^{n-1}(n\geqq2)$

$S_1=a_1=10-1=9$ $a_1=9\cdot10^{1-1}=9$ $\therefore a_n=9\cdot10^{n-1}$ $(n\geqq1)$

6) ①

a , x, b 가 등차수열을 이루므로 $x=\frac{a+b}{2}$ a , y , b 가 등비수열을 이루므로 $y^2=ab$

$a>0$, $b>0$ 이므로 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ $a\neq b$ 이므로 $\therefore$ $x>y$

7) 첫째 항을 a 라 하면, $a_n=a\cdot2^{n-1}=400$ $\cdots$① $\frac{a(2^n-1)}{2-1}=a\cdot2^n-a=750$ $\cdots$ ②

① 에서 $a\cdot2^n=800$ 을 ② 에 대입하면 $a=50$ $50\cdot2^{n-1}=400$ 에서 $2^{n-1}=8$ $\therefore$ $n=4$

$\therefore$ 첫째항 50 . 항수 4 .

8) ③

b 가 a, c 의 등비중항으므로 $b^2=ac$

$\therefore \frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_a x}=\log_x a+\log_x c=\log_x ac=\log_x b^2=2\log_x b=\frac{2}{\log_b x}$

9) $S=20000(1+0.06)+20000(1+0.06)^2+\ \cdots\ +20000(1+0.06)^{10}$

$$=\frac{20000(1+0.06)\{(1+0.06)^{10}-1\}}{(1+0.06)-1} \div \frac{20000\times1.06\times0.7908}{0.06}=279{,}416\text{ (원)}$$

10) $\sum_{k=5}^{n+5}4(k-3)=4\left\{\sum_{k=1}^{n+5}(k-3)-\sum_{k=1}^{4}(k-3)\right\}=4\left\{\frac{(n+5)(n+6)}{2}-3(n+5)+2\right\}$

$=2(n+5)(n+6)-12(n+5)+8=2n^2+22n+60-12n-60+8=2n^2+10n+8$

$\therefore\ ABC=2\times10\times8=160$

11) 준식의 일반항은, $2k\cdot 2k^2=4k^3$

$\therefore$준식 $=\sum_{k=1}^{n}4k^3=4\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=n^2(n+1)^2$

12) $S_n=\frac{7}{9}\cdot9+\frac{7}{9}\cdot99+\frac{7}{9}\cdot999+\cdots+\frac{7}{9}\cdot(999\cdots999)=\frac{7}{9}(9+99+999+\cdots+999\cdots999)$

$=\frac{7}{9}\{(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^n-1)\}=\frac{7}{9}(10+10^2+10^3+\cdots-n)$

$=\frac{7}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}=\frac{7(10^{n+1}-9n-10)}{81}$

13) $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1$

14) 원수열 $\{a_n\}$: 1, 3, 7, 15, 31, $\cdots$

계차수열 $\{b_n\}$: 2, 4, 8, 16, $\cdots$ $\qquad b_n=2^n$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$

15) 제 n 군의 첫째 항은 각 군의 첫째 항들의 계차수열을 이용하여 구한다.

$\{a_n\}$: 1 3 7 13 $\cdots$

$\{b_n\}$: 2 4 6 $\cdots$ $\qquad b_n=2n$,

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2k=1+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}=n^2-n+1$

제 n 군의 첫째 항을 n^2-n+1, 공차 2, 항수 n 인 등차수열이므로,

제 n 군의 합을 S_n 이라고 하면, $S_n=\frac{n\{2(n^2-n+1)+(n-1)\cdot2\}}{2}=n^3$

16) 100 항이 제 n 군에 속한다고 하면 제 n 군의 마지막 번호는 1+ 2+ 3+ …… $+n=\frac{n(n+1)}{2}$

∴ $\frac{n(n-1)}{2}$ < 100 ≦ $\frac{n(n+1)}{2}$ $n(n-1)<200\leqq n(n+1)$

∴ $n=14$ ∴ 제 100 항은 14

17) $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)=3+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+3)=3+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+3(n-1)=n^2+2n$

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k)=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+2\cdot\frac{10\cdot11}{2}=495$

18) $a_n=a_1\cdot f(1)\cdot f(2)\cdots f(n-1)$ 에서, $a_n=2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}=\frac{2}{n}$

19) $2a_{n+1}-a_n+2=0$ 에서, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-1$ $a_1=1$

$a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}(a_n-\alpha)$ ∴ $\alpha=-2$ $a_{n+1}+2=\frac{1}{2}(a_n+2)$ 이므로 새로운 수열 $\{b_n\}$ 에 대하여

$b_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ *Hence* $a_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2$

∴ $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_n=\sum_{k=1}^{n}3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2=6-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-2n$

20) $a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$ 에서, $a_n=a_1+(3a_1-a_1)\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=a_1+2a_1(2^{n-1}-1)$

$a_8=85$ 이므로 $a_1+2a_1(2^{7-1})=85$, $255a_1=85$ $\therefore a_1=\frac{85}{255}=\frac{1}{3}$

∴ $a_4=\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}(2^3-1)=5$

21) 양변에 역수를 취하면, $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}-3$, $\frac{1}{a_n}=b_n$ 이라 하면, $b_1=1$, $b_{n+1}=b_n-3$

$\therefore b_n=1+(n-1)\cdot(-3)=3n+4$ $\therefore a_n=\frac{1}{-3n+4}$ $\therefore a_{20}=\frac{1}{-3\times20+4}=\frac{1}{56}$

22) 3030

23) ①

$S_n=50$ 에서 $\frac{n\{2m+(n-1)\cdot1\}}{2}=50$ ∴ $n(2m+n-1)=100$

그러면, n, m ($m\leqq10$) 은 자연수에서 조건에 적합한 n, m 을 구하면 $n=5$ 일 때 $m=8$

∴ $m+n=8+5=13$

24) ①

$S_{100}=(1-2)+(3-4)+\cdots+(99-100) = (-1)+(-1)+(-1)+\cdots+(-1) = (-1)\times 50 = -50$

$S_{29}=(1-2)+(3-4)+\cdots+(27-28)+29 = (-14)+29 = 15$

$\therefore\ S_{100}+S_{29}=(-50)+15=-35$

25) ⑤

$x^2+2nx+1=0$ 의 두 근을 $\alpha_n,\ \beta_n$ 이라 하면 $\alpha_n+\beta_n=-2n$, $\alpha_n\beta_n=1$

$\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2=(\alpha_n+\beta_n)^2-2\alpha_n\beta_n =(-2n)^2-2\cdot 1 =4n^2-2$

$\sum_{n=1}^{5}(\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2)=\sum_{n=1}^{5}(4n^2-2)=4\cdot\frac{5\cdot 6\cdot 11}{5}-10=220-10=210$

26) $\sum_{n=1}^{101} ni^n=1\cdot i+2\cdot i^2+3\cdot i^3+\cdots+101\cdot i^{101}=(-2i+2)+(-2i+2)+\cdots+(-2i+2)+101i$

$=(-2i+2)\times 25+101i=50+51i$

27) $S=1+2\cdot\frac{1}{2}+3(\frac{1}{2})^2+\cdots+30(\frac{1}{2})^{29}$ …①

$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+2(\frac{1}{2})^2+3(\frac{1}{2})^3+\cdots+30(\frac{1}{2})^{30}$ …②

① - ②, $\frac{1}{2}S=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\cdots+(\frac{1}{2})^{29}-30(\frac{1}{2})^{30}=\frac{1-(\frac{1}{2})^{30}}{1-\frac{1}{2}}-30(\frac{1}{2})^{30}=2-32(\frac{1}{2})^{30}$

$\therefore\ S=4-64(\frac{1}{2})^{30}=4-(\frac{1}{2})^{24}$

28) ⑤ 준식의 양변을 $n(n+1)$ 로 나누면 , $\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{a_n}{n}=b_n$ 으로 놓으면 , $b_1=\frac{a_1}{1}=1$, $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n(n+1)}$

$\therefore b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=1+\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1})$ $\therefore\ 1+(1-\frac{1}{n})=\frac{2n-1}{n}$ $\therefore\ \frac{a_n}{n}=\frac{2n-1}{n}$

따라서 $a_n=2n-1$ $\therefore\ \sum_{k=1}^{10}(2k-1)=2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-10=100$

29) $\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{l=1}^{m}(\sum_{k=1}^{l}6)\right\}=\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{l=1}^{m}6l\right\}=\sum_{m=1}^{n}6\cdot\frac{m(m+1)}{2}=3\sum_{m=1}^{n}(m^2+n)$

$=3\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}=n(n+1)(n+2)$

30) $x_{n+1}=2x_n+y_n$ …① $y_{n+1}=x_n+2y_n$ …②

①+②, $x_{n+1}+y_{n+1}=3(x_n+y_n)$ $\therefore\ \{x_n+y_n\}$은 첫째항 x_1+y_1이고 공비가 3인 등비수열이다.

$\therefore x_n+y_n=(x_1+y_1)\cdot 3^{n-1}=3\cdot 3^{n-1}=3^n$ $\therefore\ \sum_{k=1}^{20}(x_k+y_k)=\sum_{k=1}^{20}3^k=\frac{3(3^{20}-1)}{3-1}=\frac{3}{2}(3^{20}-1)$